代数曲線のパラメータ表示について(数式処理における理論とその応用の研究)

椎原, 浩輔

数理解析研究所講究録
941 巻 1996 年 130-135

16.

代数曲線のパラメータ表示について

椎原 浩輔 (筑波大学)

16.1 概要

曲線や曲面のような代数多様体を計算機上で扱うには, その幾何学的対象を適切な方法によって表現しておくことは非常に大事であろう. ある応用に対しては代数方程式の形で表されるのが適当であったり, また別の応用においてはパラメータの形や級数の形で表しておくほうが良いこともある. 本稿では, 任意の 2 変数多項式 $f(x,y) \in \mathbf{K}[x,y]$ ($\mathbf{K}$ は標数 0 の数体) に対し, 平面曲線のブローアップによって $f(\phi,\psi) \equiv 0$ を満たす $\mathbf{K}$ 上の有理関数 $\phi(t)$, $\psi(t) \in \mathbf{K}(t)$ を求める新しい方法について提案する.

16.2 序論

代数幾何学において代数多様体 V は主な研究対象であるが, 表現の仕方はいろいろある. たとえば, 有限個の方程式の零点集合として

$$V = \left\{ (x,y) \mid x^4 - 2x^2y + y^2 - y^3 = 0,\ x,\ y \in \mathbf{C} \right\}$$

と表されたり, あるいは有理関数のとる値の集合として

$$V = \left\{ (\phi(t),\psi(t)) \;\middle|\; \phi(t) = \frac{1-t^2}{t^3},\ \psi(t) = \frac{(1-t^2)^2}{t^4},\ \ t \in \mathbf{C} \right\}$$

と表されたりする. アフィン空間のある点が V に属しているか否かといった問題には前者を使うのが適しているし, 曲面や曲線を描いたり多様体を追跡するのには後者の方がより適している. こういった

観点から相互の表現への変換をすることは意味がある.

パラメータ表現から方程式を得る変換は Gröbner 基底を用いる方法が Arnon と Sederberg らによって与えられた [1]. この逆の問題 (本稿で考察する問題) は代数幾何学では古くからある問題で, 理論的には「曲線の種数が 0 であることとパラメータ表示が可能であることが同値である」ということが知られている.

現在までの代表的な研究としては Walker [7], Abhyankar & Bajaj [8], Sendra & Winkler [2],[3],[4] などがあるが, これらは皆似たような方法を提案している. 大まかな手順は "(1) クレモナ変換を用いて特異点を解消し, 種数を計算しパラメータ表示可能かを判定する. (2) 曲線束を構成する. (3) 平面曲線と曲線束との交点を計算しパラメータ表示を行う. " といった具合である. 本稿では平面曲線のブローアップを利用した方法を提案する. この方法では曲線束を構成する必要がないといったメリットがある.

$\mathbf{K}$ を標数 0 の代数的閉体, $\mathbf{A}^k$, $\mathbf{P}^k$ をそれぞれ $\mathbf{K}$ 上のアフィン空間, 射影空間とする. $(a,b) \in \mathbf{A}^2$ と $(a:b:1) \in \mathbf{P}^2$ とを同一視することによって, アフィン空間を射影空間へ埋め込むことができる. $\mathbf{K}$ 上の平面曲線とは $C = \left\{ (a,b) \in \mathbf{A}^2 \mid f(a,b) = 0,\ f(x,y) \in \mathbf{K}[x,y] \right\}$ のことで, f が既約であるとき C を既約平面曲線という. f を次のように表したとき d を曲線 C の次数という.

$$f(x,y) = f_d(x,y) + f_{d-1}(x,y) + \cdots + f_0(x,y),$$
$$(f_d(x,y) \neq 0,\ f_k(x,y),\ 0 \leq k \leq d \text{ は次数 } k \text{ の斉次多項式})$$

また, f を斉次化した多項式を

$$F(x,y,z) = f_d(x,y) + f_{d-1}(x,y) \cdot z + \cdots + f_0(x,y) \cdot z^d$$

と書く. これは次数 d の斉次多項式である. C に対応する射影曲線は

$$C^* = \left\{ (a:b:c) \in \mathbf{P}^2 \mid F(a,b,c) = 0,\ F(x,y,z) \in \mathbf{K}[x,y,z] \right\}$$

で定義される.

定義 1 既約多項式 $f(x,y) \in \mathbf{K}[x,y]$ で定まる既約アフィン曲線 C が有理 *(rational)* であるとは以下の *1, 2* を満たす有理関数 $\phi(t),\ \psi(t) \in \mathbf{K}(t)$ が存在する時をいう.

1. ほとんどすべての $t_0 \in \mathbf{K}$ に対して, $(\phi(t_0), \psi(t_0))$ は C 上の点

2. C 上のほとんどすべての点 (x_0, y_0) に対して, $\exists\, t_0 \in \mathbf{K}$ *s.t.* $(x_0,y_0) = (\phi(t_0), \psi(t_0))$.

■

パラメータ表示問題を簡潔に表すと次のようになる.

入力： 既約アフィン平面曲線 C を定める既約多項式 $f(x,y) \in \mathbf{K}[x,y]$

判定： C が有理パラメータ表示可能か.

出力： C の有理パラメータ表示を表す有理関数

16.3 ブローアップ

定義 2 $\mathbf{A}^2$ の原点 $(0,0)$ でのブローアップとは, $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ の閉部分集合

$$W = \left\{ ((a,b),(c_0 : c_1)) \in \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1 \mid ac_1 - bc_0 = 0 \right\}$$

である. このとき W から $\mathbf{A}^2$ への自然な写像が $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ の第一因子への制限によって得られる. ■

16.4 例

例 1

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$$

とする. $f(x,y)=0$ の xy-平面での特異点は原点 $(0,0)$ のみで, これは通常 3 重点である. したがって原点を通る直線の傾きと, その直線と曲線の交点が 1 対 1 に対応する. ゆえにパラメータ表示を求めるには直線束 $y=tx$ と曲線 $f(x,y)=0$ との交点を求めれば良いことになる.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{resultant}_y(f, y-tx) & = & x^3(-t^4x + t^3 - 2t^2x - 3t - x) \\ \mathbf{resultant}_x(f, y-tx) & = & y^3(-t^4y + t^4 - 2t^2y - 3t^2 - y) \end{array} \right.$$

より

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x = & \phi(t) & = & \dfrac{t^3-3t}{t^4+2t^2+1} \\ y = & \psi(t) & = & \dfrac{t^4-3t^2}{t^4+2t^2+1} \end{array} \right.$$

を得る. ■

例 2

$$f(x,y) = (x^2-y)^2 - y^3$$

とする. $f=0$ の特異点は原点 $(0,0)$ のみで, これは 2 重点である. そこで

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_1 \\ y & = & x_1y_1 \end{array} \right. \tag{1}$$

とおいてブローアップを行うと

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= x_1^{-2} \cdot f(x_1, x_1 y_1) \\ &= (x_1 - y_1)^2 - x_1 y_1^3. \end{aligned}$$

f_1 も原点 $(0,0)$ を 2 重点として持つので

$$\begin{cases} x_1 = x_2 y_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{2}$$

とおいてブローアップを繰り返すと

$$\begin{aligned} f_2(x_2, y_2) &= y_2^{-2} \cdot f(x_2 y_2, y_2) \\ &= (x_2 - 1)^2 - x_2 y_2^2. \end{aligned}$$

$f_2 = 0$ は $(1,0)$ を 2 重点として持つので座標変換

$$\begin{cases} x_2 = x_3 + 1 \\ y_2 = y_3 \end{cases} \tag{3}$$

を施せば 3 次式 $x_3^2 - (x_3 + 1)y_3^2 = 0$ が原点を 2 重点として持つことになり, 例 1 と同様にしてパラメータ表示

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1 - t^2}{t^2} \\ y_3 = \dfrac{1 - t^2}{t} \end{cases}$$

を得る. 次に逆変換として (3), (2), (1) を順次適用すれば,

$$\begin{cases} x = \phi(t) = \dfrac{1 - t^2}{t^3} \\ y = \psi(t) = \dfrac{(1 - t^2)^2}{t^4} \end{cases}$$

が得られる. ■

例 3

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + 8x^2y - 16x^2 + y^4 + 8y^3$$

とする. $f(x, y)$ を斉次化した多項式を $F(x, y, z)$ とすると

$$F(x, y, z) = x^4 + 2x^2y^2 + 8x^2yz - 16x^2z^2 + y^4 + 8y^3z$$

と表される. ここでは $f(x, y) = 0$ のパラメータ表示の代わりに $g(y, z) = F(1, y, z)$ のパラメータ表示を求めることにする. もし, $(y, z) = (\phi(t), \psi(t))$ が $g = 0$ のパラメータ表示であれば, 射影空間の性質より $(x, y) = (1/\psi(t), \phi(t)/\psi(t))$ とおくことによって $f = 0$ のパラメータ表示が求められるの

で, 一般性を失うことはない.

$$g(y,z) = 1 + 2y^2 + 8yz - 16z^2 + y^4 + 8y^3 z$$

は $(y,z) = (\pm i, 0)$ を2重点として持つ. $(i,0)$ でのブローアップを行うために, まず座標変換

$$\begin{cases} y &= y_1 + i \\ z &= z_1 \end{cases} \tag{4}$$

を行って

$$g_1(y_1, z_1) = y_1^4 + 8y_1^3 z_1 + 4iy_1^3 + 24iy_1^2 z_1 - 4y_1^2 - 16y_1 z_1 - 16z_1^2$$

特異点が原点に移動したので

$$\begin{cases} y_1 &= y_2 \\ z_1 &= y_2 z_2 \end{cases} \tag{5}$$

とおいてブローアップをすれば

$$g_2(y_2, z_2) = 8y_2^2 z_2 + y_2^2 + 24iy_2 z_2 + 4iy_2 - 16z_2^2 - 16z_2 - 4$$

を得る. g_2 が3次式であるのに対して, $(-2i, 0)$ が2重点なので座標変換

$$\begin{cases} y_2 &= y_3 - 2i \\ z_2 &= z_3 \end{cases} \tag{6}$$

を行い, 例 *1* と同様にして

$$g_3(y_3, z_3) = 8y_3^2 z_3 + y_3^2 - 8iy_3 z_3 - 16z_3^2$$

のパラメータ表示

$$\begin{cases} y_3 = \dfrac{-t^2 + 8it + 16}{8t} \\ z_3 = \dfrac{-t^2 + 8it + 16}{8t^2} \end{cases}$$

が得られる. あとは逆変換 (6), (5), (4) を行い,

$$\begin{aligned} (x : y : z) &= \left(1 : \frac{-t^2 + 16}{8t} : \frac{t^4 + 32t^2 + 256}{64t^3}\right) \\ &= \left(\frac{64t^3}{t^4 + 32t^2 + 256} : \frac{-8t^4 + 128t^2}{t^4 + 32t^2 + 256} : 1\right). \end{aligned}$$

ちなみに, [2] にはこの例の解として次のものが挙げられている.

$$x(t) = \frac{9216t^4 - 62464t^3 + 141696t^2 - 108864t + 2916}{430336t^4 - 94464t^3 + 58976t^2 - 5904t + 1681}$$

$$y(t) = \frac{40960t^4 - 184320t^3 + 204800t^2 + 11520t - 12960}{430336t^4 - 94464t^3 + 58976t^2 - 5904t + 1681}.$$

■

16.5 謝辞

最後に, 御指導くださった佐々木建昭教授, オーストリアから論文を送ってくださった Franz Winkler 博士, 北本卓也助手および諸先輩方に深く感謝致します。

参考文献

[1]D.S.Arnon and T.W.Sederberg, Implicit equation for a parametric surface by Gröbner basis. Proc. 1984 MACSYMA User's Conference, V.E.Golden (ed.).

[2]F.Winkler, Issues in Symbolic Parametrization of Algebraic Curves. iMACS Conf. on Applic. of Comp. Algebra, University of Mexico, May 1995.

[3]J.R.Sendra and F.Winkler, Optimal Parametrization of Algebraic Curves. RISC-Linz Report Series No. 94-65, September 30, 1994.

[4]J.R.Sendra and F.Winkler, Symbolic Parametrization of Curves. Journal of Symbolic Computation, **12**, 607-631, 1991.

[5]K.Shiihara, Computation of Essentially Different Puiseux Expansions via Extended Hensel Construction. Master thesis, University of Tsukuba, March 1995.

[6]R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*. GTM 52, Springer-Verlag.

[7]R.J.Walker, *Algebraic Curves*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.

[8]S.S.Abhyankar and C.L.Bajaj. Automatic parametrization of rational curves and surfaces III: Algebraic plane curves. Computer Aided Geometric Design **5**, pp.309–321, 1988.

[9]上野健爾 著, 代数幾何学入門. 岩波書店, 1995.